AP 2001 / AII (NT)

1.0 Gegeben sind die reellen Funktionen

$f_k : x \mapsto f_k(x);\ D_{f_k} = \mathbb{R}$

$$f_k(x) = -\frac{1}{4}(x^3 + k\,x^2 - 2k\,x - 8) \quad \text{mit } k \in \mathbb{R}.$$

Der Graph einer solchen Funktion f_k in einem kartesischen Koordinatensystem heißt G_{f_k}.

1.1.1 Zeigen Sie, dass $x_1 = 2$ für alle Werte von k eine Nullstelle von f_k ist und zerlegen Sie damit den Term $f_k(x)$ in ein Produkt mit genau einem Linearfaktor. (5 BE)

(Mögliches Teilergebnis: $f_k(x) = -\frac{1}{4}(x^2 + kx + 2x + 4)(x - 2)$)

1.1.2 Untersuchen Sie, für welche Werte von k die Funktion f_k neben $x_1 = 2$ noch mindestens eine weitere Nullstelle besitzt. Achten Sie dabei auch auf die Sonderfälle $k = -6$ und $k = 2$. (9 BE)

1.1.3 Untersuchen Sie, für welche Werte von k der Graph von f_k waagrechte Tangenten besitzt. Geben Sie die Art der besonderen Stellen an.

1.1.4 Berechnen Sie nun k so, dass die Funktion f_k bei $x_2 = -2$ eine doppelte Nullstelle hat. (3 BE)

1.2.0 Für die Aufgaben dieser Gruppe gilt $k = 2$.

1.2.1 Bestimmen Sie Art und Koordinaten sämtlicher relativer Extrempunkte sowie die Koordinaten des Wendepunktes des Graphen G_{f_2}. (9 BE)

1.2.2 Zeichnen Sie den Graphen G_{f_2} für $-4 \leq x \leq 2{,}5$. Verwenden Sie dazu die bisherigen Ergebnisse und berechnen Sie zusätzlich die Funktionswerte $f_2(-4)$, $f_2(0)$ und $f_2(2{,}5)$.

Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE = 1 cm. (5 BE)

1.2.3 Der Graph G_{f_2} besitzt zwei Tangenten t_1 und t_2, die parallel zur Winkelhalbierenden des ersten und dritten Quadranten verlaufen. Die Berührpunkte dieser Tangenten mit dem Graphen G_{f_2} heißen B_1 und B_2. Der weiter rechts liegende Berührpunkt wird mit B_1 bezeichnet.

Ermitteln Sie die Koordinaten der Punkte B_1 und B_2 sowie die Gleichung der Tangente t_1. (Teilergebnis: t_1 hat die Funktionsgleichung $y = x + 2$) (7 BE)